数理解析研究所講究録
201巻 1974年 194-196

混合問題の Green 函数の特異性

京大 数理研　河合隆裕

双曲型方程式に対する初期-境界値混合問題の Green 函数
即ち, 時刻 $t=0$ での初期値を $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \delta(x')\delta(x_n-a) \end{pmatrix}$ $(a>0)$
で与え, $\{x_n=0\}$ での境界値が 0 になる $P(t,x,D_t,D_x)E=0$
$(t\geq 0,\ x_n>0)$ の解 E の特異性を考えたい。本講で扱うのは次の2つの場合である。(境界面は常に非特性的と仮定する。)

1° $P(t,x,D_t,D_x)$ の主要部が t 方向に双曲型 (あるいは少しく一般に多重度一定) かつ境界条件 Lopatinsky 行列式が $\neq 0$, 更に, 所謂 shadow condition が満たされているとする。この時 $p_m(t,x',x_n;\tau,\eta',\eta_n)|_{x_n=0,\ \eta'=0}=0$ は τ について実, 単純根のみを持つ (多重度一定ならその多重度に応じる修正を要する。以下同じ) 従って $(t,x';\tau,\eta')$ が $(t_0,x_0';1,0)$ のある近傍を動く限りそこでは問題は "双曲的" である。実際, その近傍は $p_m=0$, $\dfrac{\partial p_m}{\partial \eta_n}\neq 0$ なる条件を満たし $(t,x';\tau,\eta')=(t_0,x_0';1,0)$ を含む $\sqrt{-1}S^*N$ の連結成分に他ならぬ。ここに $N=\{x_n=0\}$, (t_0,x_0') は最も速い "波" ($(t,x',x_n)=(0,0,a)$ より出る陪特性曲線で最も速く N に達する物) の N への到達点である。従ってこの時は $\partial p_m/\partial \eta_n\neq 0$ 故陪特性曲線は N と横断的に交わる故, "浜田の方法" により反射波を容易に構成できる。E の特異性が N で反射される

陪特性帯に集中していることは 超函数の制限 積分等の作用と 特異性スペクトラムの関係を用いて 初期値問題の時と同様にできる。(たとえば河合，Publ. RIMS, Kyoto Univ 7 (1971) pp. 363−397 参照) 尚，一階双曲型の場合は Lewis, J. Math. Mech 7 (1958) pp. 571−592 も参照。

2° もう一つの場合は Pが 定数係数，斉次，境界作用素も斉次 の場合である。この時 $P=a(D)$，境界作用素を B_p $(p=1,\dots,k)$ として (但し kは $a(\tau,\eta',\eta_n)=\prod_{j=1}^{m}(\eta_n-\lambda_j(\tau,\eta'))$ として (τ,η')が 適当な 錐状領域 Γ_0 を動く時 $\mathrm{Im}(\lambda_1),\dots,\mathrm{Im}(\lambda_k)>0$ ととれることが知られているから (たとえば松村; Proc. Japan Acad. 47 (1971) pp. 115−119 参照) そのkをとる。) $\Delta(\tau,\xi')=\det(B_p(\tau,\eta',\lambda_j(\tau,\eta'))_{1\le j,p\le k}$, $\varphi_j(t,x,s,y';\tau,\eta')=x_n\lambda_j(\tau,\eta')+(t-s)\tau+\langle x'-y',\eta'\rangle$ を定め，Eを

$$\int\sum\frac{1}{\Delta(\tau,\eta')\varphi_j^{l}(t,x,s,y';\tau,\eta')}\,c_{j,l}\,\omega(\tau,\eta')$$

の形にて求める。(P, B_p いずれも斉次と仮定したのは，ここで係数 $c_{j,l}$ を決めることを容易にするためである。) 以下その特異性は Δ^{-1} の正則な領域 と $\{\varphi_j\neq 0,\ \varphi_j$ 正則$\}$という領域の共通部分を調べることにより，被積分函数の特異性スペクトラムを調べ，通常通り 積分と特異性スペクトラムの関係を

見ればよい。その議論は本質的には(Atiyah-Bott-Gårding による)局所化の方法と言ってよい。(たとえば河合, J. Math. Soc. Japan 24 (1972) pp.481-517 等参照) しかし この場合 φの正則な領域を調べる部分が面倒で 本質的に平方根型の特異性を持つ λ_j (所謂 Agmon の条件)の場合以外 今の所どのようにうまく幾何学的に捕えれるか私には判らない。